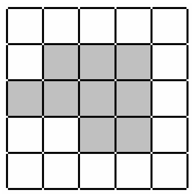
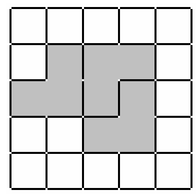
"Plattläggning"

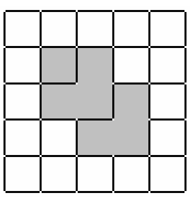
Problem:
En sammanhängande yta är given, lagd på ett kvadratiskt rutnät täcker den helt en viss mängd av rutorna, och inget annat. Är det möjligt att "förinta" hela ytan genom att upprepat ta bort från ytan tre sammanhängande kvadrater vilka inte ligger i linje alla tre? I så fall, hur kan det göras?

Figurerna nedan är ett exempel på problemet. Vänstra figuren visar ytan i grått som blivit lagd på det kvadratiska rutnätet. Figuren till höger visar en möjlig lösning för att förinta hela ytan med "ostbågar", som de geometriska förintelsevapnen hädanefter kommer att kallas.

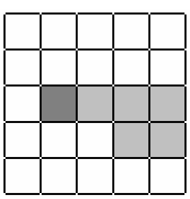




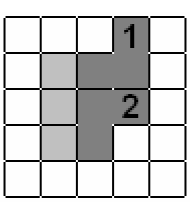
Analys:



Ett första kriterium för en ytas förintelsebarhet är att antalet kvadrater den upptar är delbart med tre, annars skulle det garanterat bli en eller två rutor kvar när man använt så många ostbågar man kan.
Figuren till vänster är 7 rutor stor, 7 mod 3=1, en stackare blev över.



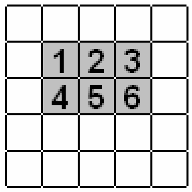
Ett andra kriterium är att, varje kvadrat rutan upptar måste kunna förintas i den första ostbågesalvan. Fastän antalet rutor i ytan till vänster (alla grå rutor) är 6, alltså jämnt delbart med 3, så är ytan inte förintelsebar, detta "för att" den mörkgrå rutan omöjligt kan ingå i en ostbåge i första steget, och därmed inte i något steg som följer.



De två kriterierna ovan kan användas i första steget för att avgöra om det är lönt att söka en riktig lösning, för även om båda kriterierna är uppfyllda så är det inte säkert att ytan är förintelsebar! Ytan till vänster har 9 rutor=bra, alla rutor kan ostbåge-bombas i första steget=bra, men lösning saknas ändock. Detta eftersom ruta nr 1 endast ingår i en ostbåge och när den är lagd så ingår plötsligt ruta nr 2 endast i en ostbåge och när den är lagd så kan man lika gärna äta upp den sista ostbågen, för i ytan kan den inte läggas.

Att hitta en lösning till än mer komplicerade ytor, eller hitta mängden av samtliga lösningar, eller hur många det finns, kan bli, rätt komplicerat. Möjligen kan det ha en viss fördel att transformera problemet till ett annat ekvivalent problem på följande sätt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$



Man numrerar rutorna i ytan med nummer från 1 och uppåt. Om man sedan tar numren på rutorna som ingår i *varje möjlig* ostbåge (tre nummer per ostbåge), får man en matris som den till vänster. Där tex första raden (1,2,4) är den ostbåge som ligger högst upp till vänster på ytan.

Informationen i matrisen kan beskrivas med en annan matris som den nedan till vänster, där raderna är distinkta ostbågar och de tre ettorna i varje rad visar vilka rutor som bildar ostbågen, kolonn-numret där en etta står är samma som numret för rutan.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Första raden (1,1,0,1,0,0) är den ostbåge högst upp till vänster på ytan. Problemet blir nu att hitta två rader, (i det här fallet), som om man tolkar raderna som binära tal och OR:ar ihop dem, ger resultatet (1,1,1,1,1,1), alltså alla rutor i ytan förintade. Första och sista raden är en lösning eftersom:

$$\begin{bmatrix} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ OR & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Detta motsvaras av översta vänstra och nedersta högra ostbågen på ytan.

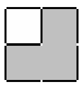
Att denna yta endast kan förintas på två olika sätt kan ses i matrisen ovan tex genom att observera att kolonn två endast innehåller två nollor, och om två rader med vardera tre ettor ska kunna or:as ihop till 111111b så får inga ettor delas i samma position av de två raderna. Detta innebär att exakt en av de två raderna med värde noll i kolonn två, (rad 5 och 8), måste ingå i varje lösning. Exakt en lösning svarar mot vardera av dessa rader, "rad 5 med rad 4" och "rad 8 med rad 1", vilket därmed är samtliga lösningar.

Nog är det lätt att övertyga sig om samma två lösningar genom att observera den grafiska representationen av ytan, men då antalet rutor och möjliga ostbågar ökar kanske det blir smidigare att arbeta med den binära matrisen, i varje fall om man vill ha mera stringenta bevis för lösbarhet och antal lösningar. Säkerligen är matris-formen fördelaktigare vid data-analys av problemet.

Dimensionerna för den binära matrisen varierar med antalet rutor och den allmänna strukturen på ytan. Antalet kolonner kommer alltid att vara lika som antalet rutor, och raderna kommer alltid att vara förre än tex 4*antalet rutor. Det senare eftersom det endast går att placera en ostbåge på fyra olika håll, och hörnet på ostbågen måste finnas på någon av rutorna, alltså "4 håll" * "antalet rutor", men det blir alltid mer eller mindre spill, åtminstonde på ytans kanter, där vissa ostbågar omöjligen kan läggas.

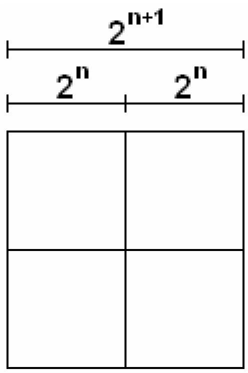
Man kan definiera vissa familjer av ytor som *garanterat* går att förinta. Ett exempel på en sådan familj är den av alla kvadratiska ytor med $2^n \ (n > 0)$ rutors sidlängd varav en ruta saknas, var som helst på ytan. Medlemmarna av denna familj är garanterat förintelsebara, och ett induktions-bevis för detta följer nedan.

y(n) betecknar mängden av alla kvadratiska ytor med 2^n rutors sidlängd, varav en ruta saknas någonstans. Den saknade rutan benämnes *hålruta*.

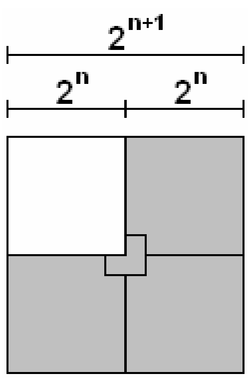


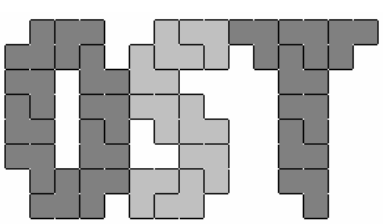
y(1) innehåller 4 olika kvadratiska ytor med sidlängd 2 och en hålruta i något av hörnen, rotations-symmetri ger att alla 4:a ytorna är förintelsebara om någon av dem är det. Ytan till vänster tillhör y(1) och är förintelsebar, därmed är alla ytor i y(1) förintelsebara.

Det antas att samtliga ytor i y(n) är förintelsebara, då följer det att samtliga ytor i y(n+1) också är förintelsebara, pga följande.



Kvadratområdet för y(n+1) kan byggas upp av fyra områden av samma storlek som för y(n), enligt figuren till vänster. Varje av dessa 4 delkvadrater är förintelsebara då man tar bort en ruta på valfritt ställe, enligt förutsättning. Ytorna i y(n+1) fås genom borttagande av *en* valfri ruta från hela det kvadratiska området till vänster. Denna ruta hamnar nödvändigtvis i någon av de fyra delkvadraterna, varför denna delkvadrat *blir förintelsebar*. Antag att hålrutan är från delkvadraten högst upp till vänster, då blir situationen som i figuren nedan där den vita kvadraten innehåller hålrutan och är förintelsebar. Om då det grå området även det är förintelsebart så är hela ytan från y(n+1) förintelsebar. Men det grå området *är* förintelsebart, eftersom det går att placera en ostbåge i centrum som förintar exakt en ruta från varje delkvadrat och därmed lämnar tre delytor, varje från y(n), vilka alla är förintelsebara. Därmed är alla ytor i y(n+1) där hålrutan ligger i den *övre vänstra* delkvadraten, förintelsebara. Genom analogi är y(n+1)-ytorna förintelsebara *oavsett* i vilken delkvadrat man placerar hålrutan, eftersom ostbågen i centrum alltid går att lägga. Därmed är alla ytor i y(n+1) förintelsebara *om* alla ytor i y(n) är förintelsebara. Eftersom ytorna i y(1) är förintelsebara så följer det att alla ytor i alla y(x) $(x > 0)$, är förintelsebara. V.S.V.





Till vänster, ett grafiskt bevis på att, som alla som sett hundra hungriga möss invadera en ostaffär säker vet, ost går att förinta.